梁开华元旦新题 2024 参考答案

梁开华

元旦新题 2024（梁开华）：对于如**图 1-图 4** 等分**单位圆周**的 3、4、5、6 个点向圆内处于相等状态的**弧长如果向圆内绷直**，形成洪钟状，四星状，五角星及五星状，六星状的不同形态。逐一**试求这些形态围成的面积**。

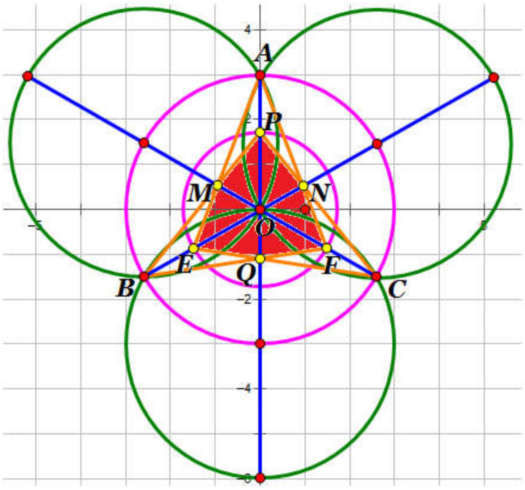

图 1

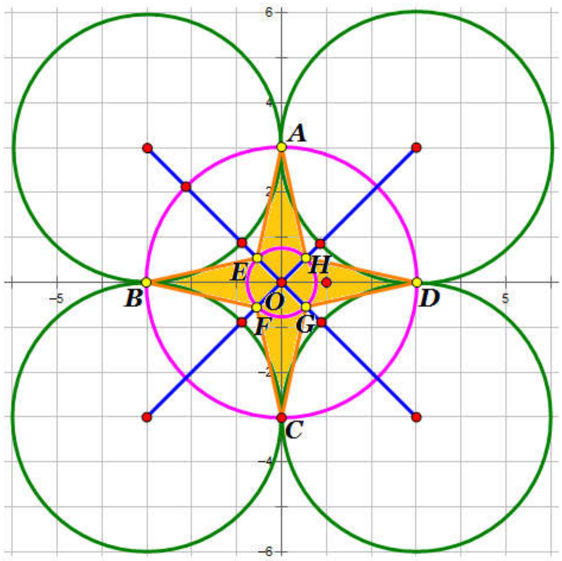

图 2

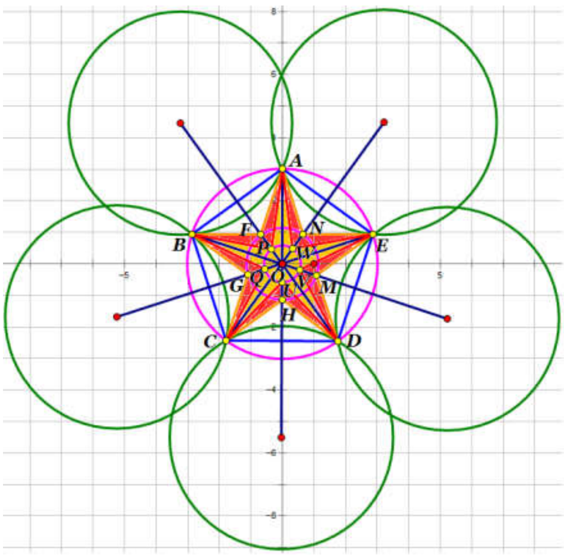

图 3

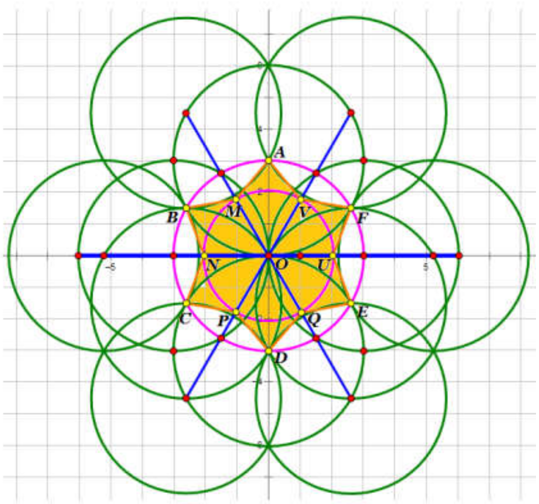

图 4

依然像已曾进行的**顶尖数学题有奖征解**一样，进行**第五此征解**，依然 **100 元 1 人，50 元 2 人**。依然 **10 天到两周以内公布参考答案**。

解：这里的图形都是象征性的，因为线段与圆弧相等，作图不易精确表达。见**图 5**，“实际”线段 *ME* 长度显然比想象的圆弧 *MO* 绷直短得多，但“**洪钟**”图形样式由**图 1** 却有更好的形象雅致显现。**图 5** 单位长度**扩大了 10 倍**，与实际较为对应。噢，**洪钟大小“原来”竟相当于这样**。想想也是，铸一口钟成人般大小，相当了不得了。由中心 *O*，因此，

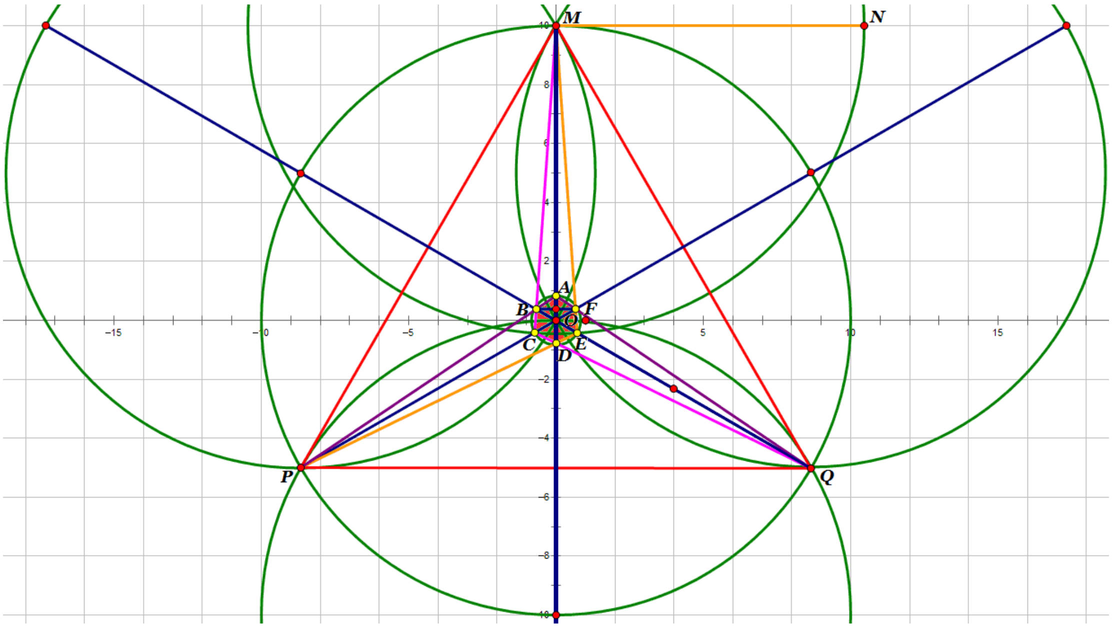

图 5

（1） $|MO|=1,|MP|=\sqrt{3},P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),|ME|=|PE|=|MN|=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\approx 1.047\cdots$

设 $E(x_0,y_0)$，则

$$x^2+(y-1)^2=\frac{\pi^2}{9}=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2,\sqrt{3}x+\frac{3}{4}+y+\frac{1}{4}+2y-1=0,$$

$$x=-\sqrt{3}y,3y^2+y^2-2y+1-\frac{\pi^2}{9}=0,$$

$$36y^2-18y+9-\pi^2=0,y<0,y_0=\frac{18-\sqrt{18^2+4\times 36\left(\pi^2-9\right)}}{2\times 36}$$

$$=\frac{18-6\sqrt{9+4\left(\pi^2-9\right)}}{2\times 36}=\frac{3-\sqrt{4\pi^2-27}}{12}\approx -0.0443733\cdots$$

$$x_0=-\sqrt{3}\left(\frac{3-\sqrt{4\pi^2-27}}{12}\right)\approx 0.0768569\cdots$$

所以，看得清楚一些，不妨参照**图 1** 计算，设正三角形 PEF 的面积为 s_1，等腰三角形 EQF 的面积为 s_2，则洪钟图形面积

$$s=s_1+3s_2=\frac{\sqrt{3}}{4}|(2x_0)^2|+3\times\frac{1}{2}|2x_0|\cdot|y_0|=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(12{y_0}^2+12{y_0}^2\right)$$

$$=6\sqrt{3}{y_0}^2=6\sqrt{3}\left(\frac{3-\sqrt{4\pi^2-27}}{12}\right)^2=\sqrt{3}\left(\frac{9-6\sqrt{4\pi^2-27}+4\pi^2-27}{24}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(4\pi^2-18-6\sqrt{4\pi^2-27}\right)}{24}=\frac{\sqrt{3}\left(2\pi^2-9-3\sqrt{4\pi^2-27}\right)}{12}$$

$\approx 0.0204624\cdots$（平方单位）。

可谓非常的精准。数据也确实很小。

（2）是最容易计算的：

$$AB=\sqrt{2},|AE|=|EB|=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4},|EO|=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{\pi^2-8}}{4},|EH|=\sqrt{2}|EO|=\frac{4-\sqrt{2\pi^2-16}}{4};$$

所以，四星形面积

$$s=4\times\frac{1}{2}|AO|\cdot|EH|=2\times\frac{4-\sqrt{2\pi^2-16}}{4}=\frac{4-\sqrt{2\pi^2-16}}{2}$$

$\approx 1.0331483\cdots$（平方单位）。

（3）①五角星是最美丽的图形构造美感得益于黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\cdots$ 且关联图形及数据的常识性知识点太多。值得简单梳理。

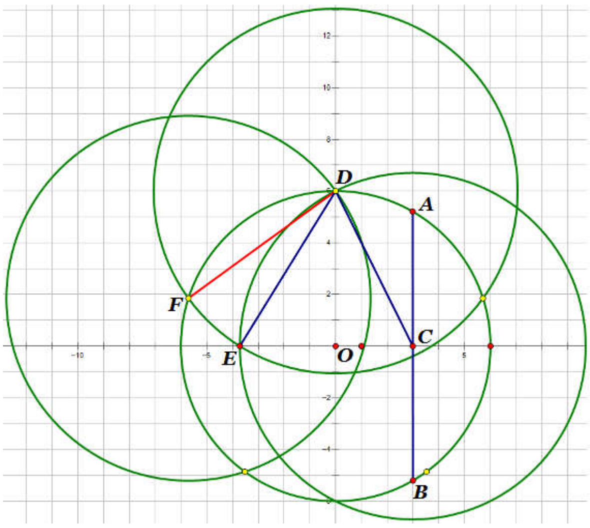

图6

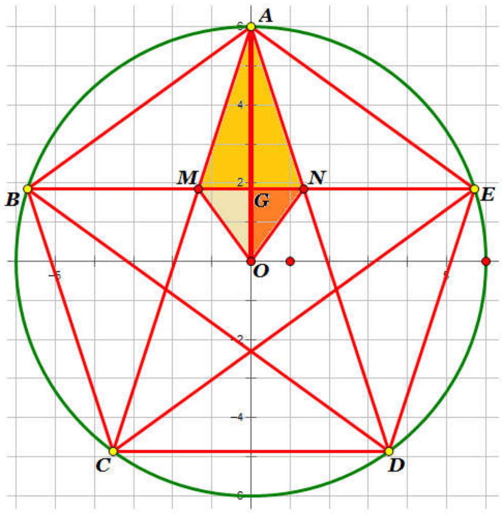

图7

◇**图6**揭示了作图方法，对于单位圆，AB为$\frac{1}{2}$竖线，则圆的五等分分割数据即

$$CD=\frac{\sqrt{5}}{2},EO=\frac{\sqrt{5}-1}{2},DF=DE=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}。$$

其中EO即黄金分割数。

◇设$\sin 18^\circ=x$，由

$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ, 3x - 4x^3 = 1 - 2x^2, 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0, (x-1)(4x^2 + 2x - 1) = 0,$
$4x^2 + 2x - 1 = 0,$

得

$$\sin 18^\circ = x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 + 4 \times 4}}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{EO}{2} > 0 \text{。}$$

◇ $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2 \times \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$,

所以，

$4\cos 36^\circ \sin 18^\circ = 1$。

◇图 7 中，BE 认为是人的双臂平伸，M、N 即肩点。满足

$\frac{MN}{BM} = \frac{BM}{BN} \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{AM + MN} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$。所以，人体蕴含美。设

$$MN = x, \angle BOE = 2 \times \frac{360^\circ}{5} = 144^\circ, BE = \sqrt{2\left(1 - \cos 144^\circ\right)} = \sqrt{2\left(1 + \cos 36^\circ\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(1 + 1 - 2\sin^2 18^\circ\right)} = 2\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2};$$

所以，

$$\frac{MN}{BM} = \frac{x}{\frac{BE - x}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, 4x = \left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} - x\right),$$

$$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} - x = \left(\sqrt{5} + 1\right)x, x = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2\left(\sqrt{5} + 2\right)} = \frac{\left(\sqrt{5} - 2\right)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2};$$

所以，五角星面积

$$s = 5 \times \frac{1}{2} AO \cdot MN = \frac{5}{2} \times \frac{\left(\sqrt{5} - 2\right)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} = \frac{5\left(\sqrt{5} - 2\right)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$\approx 1.1225699\cdots$（平方单位）。

②由

$$BM = \frac{MN}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{\frac{\left(\sqrt{5} - 2\right)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} - 2\right)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$= \frac{\left(3 - \sqrt{5}\right)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \approx 0.726542528\cdots, BP = \frac{\pi}{5} \approx 0.62831853\cdots$$

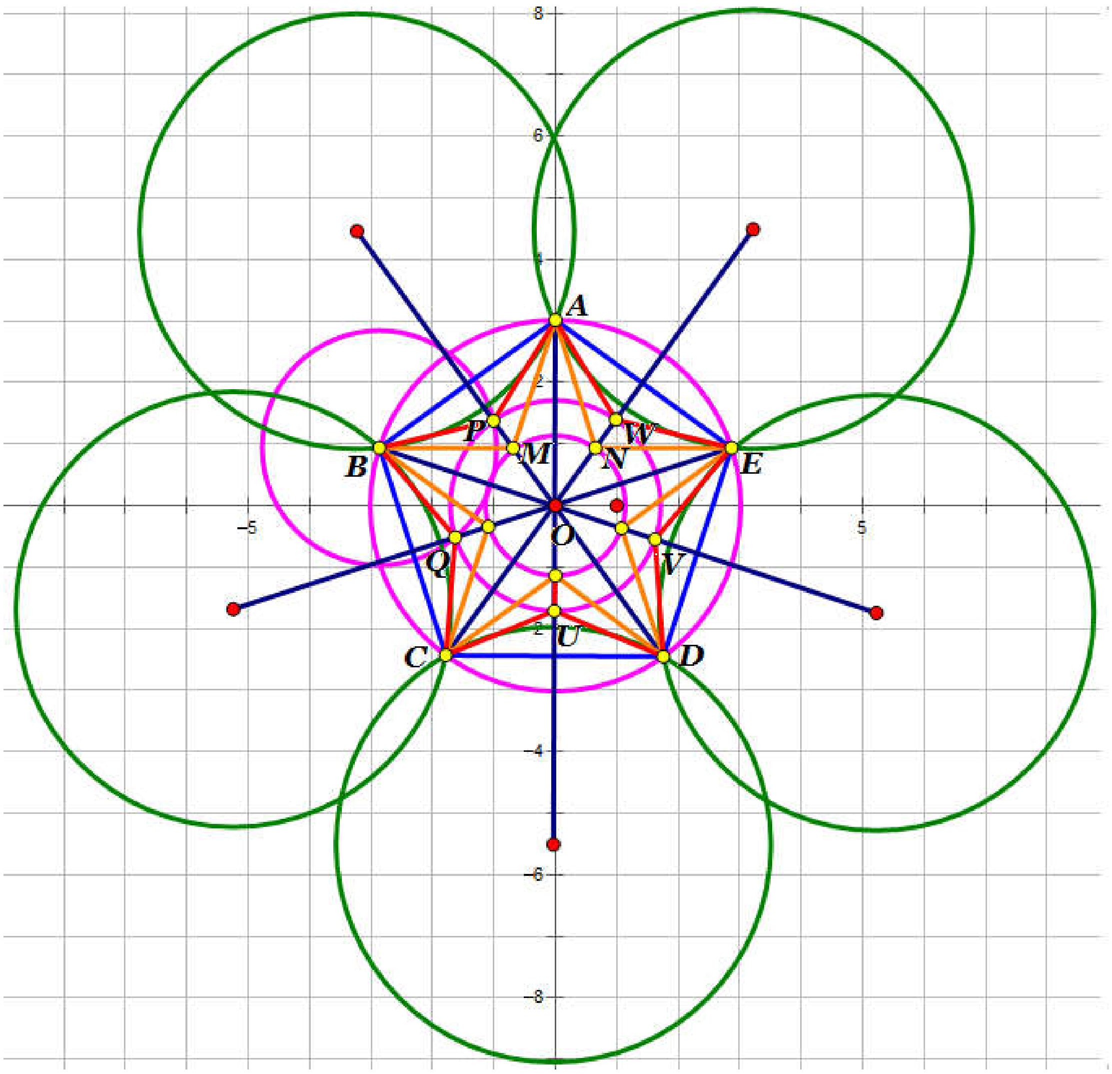

图 8

非常惊骇弦绷直形成的五星形竟五角星外围的相当位置。见**图 8**:

$$AB=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},PO=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\sqrt{\frac{\pi^2}{25}-\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\approx 0.586997\cdots$$

所以，

$$PW=\sqrt{2|PO|^2\left(1-\cos 72^\circ\right)}=PO\sqrt{2\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)}=$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\sqrt{\frac{\pi^2}{25}-\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\approx 0.690\cdots$$

所以，五角星面积

$$s=5\times\frac{1}{2}AO\cdot PW$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\sqrt{\frac{\pi^2}{25}-\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\approx 1.725140\cdots$$（平方单位）

（4）六星形的也容易计算。其中

$$MO=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{\pi^2-9}}{6},$$

$$MV=MO\sqrt{2\left(1-\cos 60^\circ\right)}=MO=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{\pi^2-9}}{6}\approx 0.710\cdots$$

所以，

$$s=6\times\frac{1}{2}AO\cdot WV=3\times\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{\pi^2-9}}{6}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{\pi^2-9}}{2}\approx 2.13181\cdots$$（平方单位）。