

第 21 次：蛇年 2025 元旦新题追加参考答案

梁开华

梁开华孪生素数定理：把九个数 $a^3, b^3, c^3, a^2b, b^2c, c^2a, ab^2, bc^2, ca^2$ 分作两组，使其数值和分别相等，素数 2 必须在内，如果另两个是孪生素数，请证明一定有解。

证明：设三个素数为 $m = 2, p, p + m$ ，九个数之和为

$$\begin{aligned} y &= m^3 + p^3 + (p + m)^3 + (m + p)(p + p + m)(p + m + m) \\ &= 2m^3 + 2p^3 + 3p^2m + 3pm^2 + m(2p^2 + 5pm + 2m^2) + p(2p^2 + 5pm + 2m^2) \\ &= 4p^3 + 4m^3 + 10p^2m + 10pm^2; \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} &m^3 + (p + m)^3 + m^2p + p(p + m)^2 \\ &= 2m^3 + 2p^3 + 3p^2m + 3pm^2 + pm^2 + 2p^2m + pm^2 \\ &= 2m^3 + 2p^3 + 5p^2m + 5pm^2 = \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

所以，定理成立。