只用圆规数据作图的实现

梁开华

题目（梁开华）：请只用圆规实现数据作图：单位长度 1，$\sqrt{3}$；自然数 1，2，3，…，n；$\sqrt{5},\sqrt{7},2\sqrt{2}$；以及正方形的四个顶点，“旌旗矩形”的六个顶点，正五边形的五个顶点。

解：由两点作正三角形略。

如**图 1**，以 A、B 为圆心的单位圆交于 M、N，以 $MN=\sqrt{3}$ 为边长作正三角形确定 C，由此 P、Q 以及由此从 D 到 K 一系列的自然数之长度（点）皆可确定。

注意：这只是单一走向比如横向的。

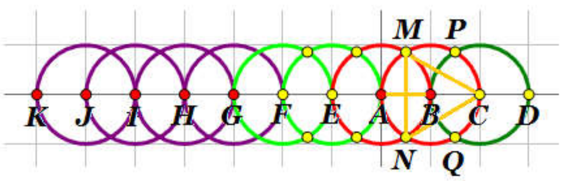

图 1

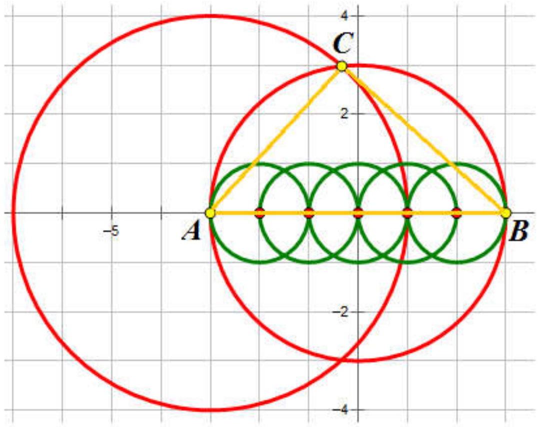

图 2

如**图 2**，视 2 为 1， $AB=3, AC=2 \Rightarrow CB=\sqrt{5}$；

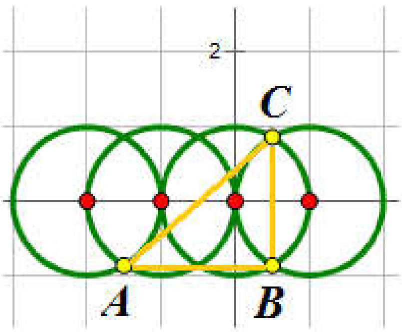

图 3

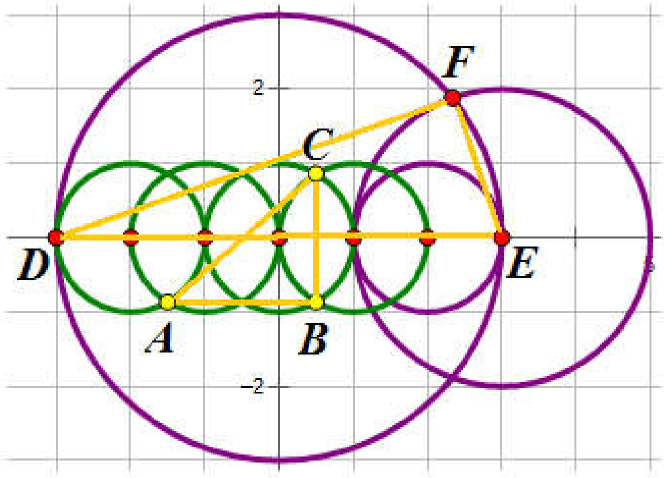

图 4

如**图 3**，$AB=2, BC=\sqrt{3}, AC=\sqrt{7}$；如**图 4**，视 2 为 1，$DE=3, EF=1 \Rightarrow DF=2\sqrt{2}$ 。

这样，由 2 与 $2\sqrt{2}$ 的关系，如**图 5**，实现了正方形四顶点的作图：

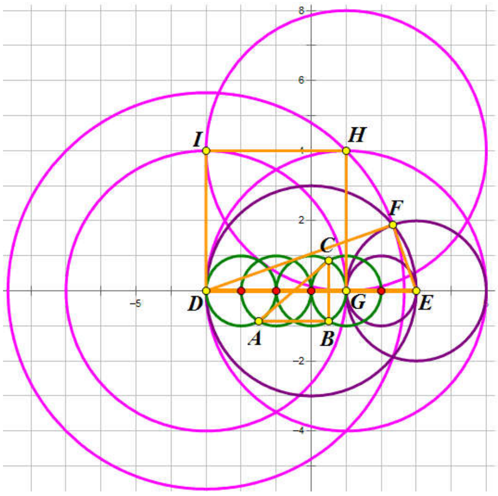

图 5

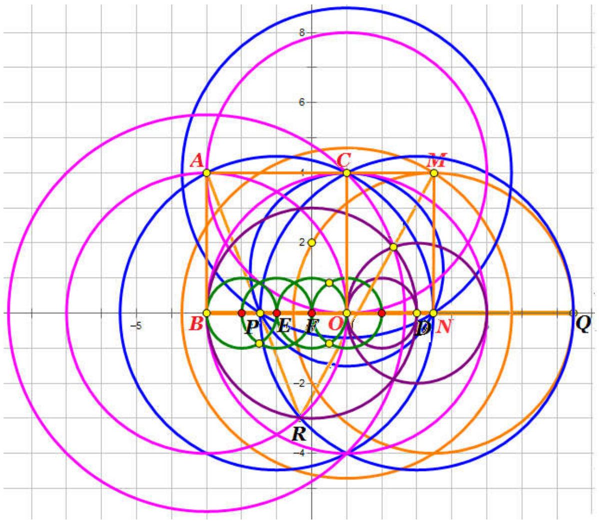

图 6

再如**图 6**，字母重新排布，增加相关圆定位，以 D、E 为圆心，$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ 为半径的圆，得新顶点 P、N、Q，P 在 AR 上，N 与 P 以及 E 与 D 关于 O 中心对称，是必然的。

考察 $\odot B,\odot F$ 的交点 R 之坐标，且求出 AR 方程并 P 坐标代入：

$$\begin{cases}(x+4)^2+y^2=16,\\ (x+1)^2+y^2=9,\end{cases} 8x+16-2x-1=7,$$

$$x_R=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}, y_R=-\sqrt{9-\left(\frac{-4+3}{3}\right)^2}=-\frac{4}{3}\sqrt{5}。$$

作图与数据的正确对应无与伦比。比如别误因为 $y_R=-3$。由此，

$$\frac{y+\frac{4}{3}\sqrt{5}}{4+\frac{4}{3}\sqrt{5}}=\frac{x+\frac{4}{3}}{-4+\frac{4}{3}}, \frac{3y+4\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{3x+4}{-2}, 3y+4\sqrt{5}=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot(3x+4)$$

$$\Rightarrow 0+4\sqrt{5}=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\left[3\times\left(-2(\sqrt{5}-1)+4\right)\right], 4\sqrt{5}=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\left(-6\sqrt{5}+10\right)$$

$$=\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-5\right)=4\sqrt{5}。$$

表明判断是正确的。由对称，坐标 $N\left(2\sqrt{5}-2,0\right)\Rightarrow M\left(2\sqrt{5}-2,4\right)$。

这样，国旗类黄金分割外形（**“旌旗矩形”**）的基本点 A,B,O,N,M,C 齐备。

我所揭示的重要图形特征是：$ABOC$ 是正方形， $ONMC$ 仍是**旌旗矩形**；如果沿矩形长边拼接以长边为边长的正方形，得新矩形又为**旌旗矩形**。把**旌旗矩形**延边的中点，当然可分成四个等积的**旌旗矩形；**四个等积的**旌旗矩形**，当然拼接成新的**旌旗矩形**……

中华人民共和国建国初期，由于还没有黄金分割美的学术概念，还不清楚对应矩形的

图形特征，国旗矩形的边长之比为$\frac{2}{3}$，估计早已修正。五颗星占比$\frac{1}{4}$面积，应该恰在左上方的黄金分割矩形内。

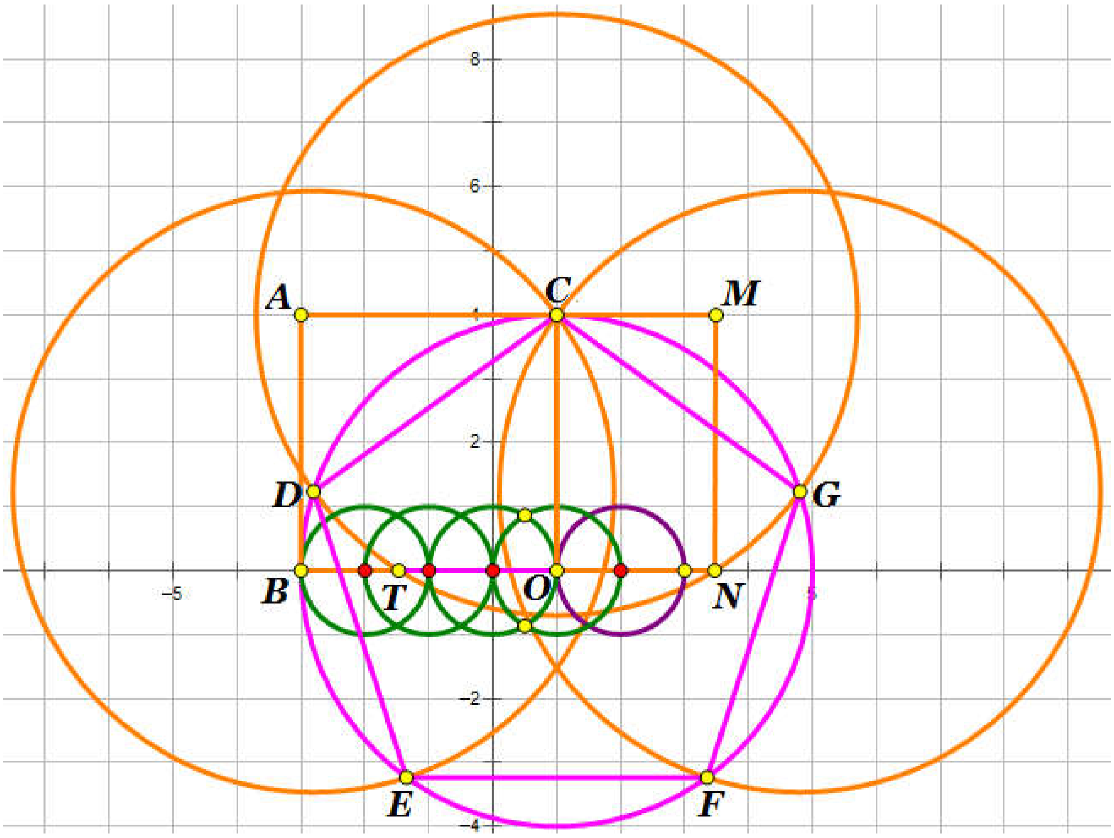

图 7

如**图 7**，去掉图形的杂沓线条部分，字母重新给出。视 BO=1，TO 即黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

得$TC=\sqrt{TO^2+OT^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$，即正五边形边长。

由此，顶点 C、D、E、G、F 形成。